Unidad 1: Números Complejos

1.1 Introducción

Además de los conjuntos de números *naturales, enteros, racionales y reales* existe el conjunto de *números complejos* que juegan un rol importante no solo en matemáticas sino en las ciencias en general. La primera aplicación matemática que tienen estos números es que sirven para resolver la siguiente ecuación[1]

$$x^2 = -1. \tag{1}$$

Babilonios, Griegos y Árabes consideraban imposible la solución de éste problema. El primer indicio de solución surgió con Girolamo Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1499-1557). A partir de entonces y durante varios siglos, los matemáticos trabajaron con números complejos sin confirmar su existencia. Actualmente son muy utilizados en las aplicaciones prácticas como en las corrientes eléctricas y en la física subatómica.

Sabemos que esta ecuación no tiene solución *real,* ya que cualquier número real elevado al cuadrado es no negativo. Para resolver la ecuación (1) introduciremos la *unidad imaginaria*, denotada por "i", con la siguiente propiedad

$$i^2 = -1,$$

como su cuadrado es negativo, la letra "i" *no representa un número real.*

El sistema numérico que resultó al introducir la unidad imaginaria, se llama *conjunto de números complejos.*

1.2 Forma binómica o canónica

Definición 1 *Sean a y b números reales, definimos el número complejo z como*

$$z = a + b\,i, \qquad \text{donde } i^2 = -1.$$

Ésta es la forma *binómica* o *canónica* del número complejo z. El conjunto de números complejos se lo denota por $\mathbb{C}$.

Notamos que si $z = a + b\,i$ y $b = 0$ entonces el número complejo es simplemente un número real. Es decir, que cualquier número real x, se lo puede ver o mirar como un número complejo de la forma $z = x + 0\,i$. Esto nos dice que el conjunto de número complejos contiene al conjunto de números reales. Por esto decimos que a es *la parte real* y b *la parte imaginaria* del número complejo $a + b\,i$.

La igualdad, suma, resta y multiplicación de números complejos, están definidas de modo que se conservan las reglas del álgebra de números reales. Esto es:

Definición 2 *Dos números complejos $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ son* ***iguales*** *cuando tienen la misma parte real e imaginaria, es decir*

$$z = w \text{ cuando } a = c \text{ y } b = d.$$

1.2.1 Operaciones entre números complejos

<u>**Producto por un real k :**</u>

Definición 3 *Dado un número complejo $a + b\,i$ y un número real k entonces*

$$k\,(a + b\,i) = ka + (kb)\ i.$$

Ejemplo 1 *Dado $z = 2 - 3\,i$, calcular*

1. $(-2)\,z = (-2)\,2 + ((-2)\,(-3))\ i = -4 + 6\,i.$
2. $\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}\,(2 - 3\,i) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}\,(-3)\ i = 1 - \frac{3}{2}\,i.$

[1] Ver la solución en Ejemplo 18, al final de la unidad.

Suma:

Definición 4 *Si $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ son dos números complejos entonces*

$$z + w = (a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\ i.$$

Resta:

Definición 5 *Si $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ son dos números complejos entonces*

$$z - w = (a - c) + (b - d)\ i.$$

Observación. La resta de dos números complejos se puede definir en forma similar al de números reales, es decir

$$z - w = z + (-1)w$$

$(-1)\,w$ se lo denomina el **opuesto** de w.
Observación. Todas las operaciones (suma, producto, producto y cociente) de números complejos cumplen propiedades análogas a las correspondientes en números reales, por ejemplo: asociativa, conmutativa, distributiva, etc.

Ejemplo 2 *Calcular:*

1. $(2 - 3i) + (-1 + 4i) = (2 - 1) + (-3 + 4)\,i = 1 + 1i = 1 + i.$
2. $(2 - 3i) - (-1 + 4i) = (2 - (-1)) + (-3 - 4)\,i = (2 + 1) + (-7)\,i = 3 - 7i.$

Multiplicación o producto:

Definición 6 *Si $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ son dos números complejos entonces el* ***producto*** *es:*

$$z\,w = (a + b\,i)\ (c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\ i.$$

Observación. Para multiplicar dos números complejos podemos usar la definición anterior o la propiedad distributiva y que $i^2 = -1$, como lo muestra los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3
1. *Resolver usando la definición del producto de complejos:*
$(2 - 3i)\ (-1 + 4i) = (2\,(-1) - (-3)\,4) + ((2)\,4 + (-3)\,(-1))\,i =$
$(-2 - (-12)) + (8 + 3)\,i = (-2 + 12) + (11)\,i = 10 + 11i.$
2. *Resolver usando la propiedad distributiva y que $i^2 = -1$:*
$(2 - 3i)\ (-1 + 4i) = 2\,(-1) + 2\,(4i) + (-3i)\,(-1) + (-3i)\,(4i) =$
$-2 + 8i + 3i + \left(-12i^2\right) = -2 + 11i - 12\,(-1) = (-2 + 12) + (11)\,i = 10 + 11i.$

Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, son verdaderas para los números complejos. Para analizar la existencia del inverso multiplicativo de un número distinto de cero se deben hacer algunas consideraciones previas:

Conjugado de un número complejo:

Definición 7 *El* ***conjugado*** *del número complejo $z = a + b\,i$ es $\overline{z} = a - b\,i$.*

Ejemplo 4 *Calcular el conjugado de los siguientes números complejos*

1. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i = 2 - 3i$

1. $\overline{-2 - 4i} = -2 + 4i$

2. $\overline{2} = \overline{2 + 0i} = 2$

Propiedades del conjugado de un número complejo:

Las propiedades 1 a 4 se demuestran usando directamente las definiciones correspondientes.

1. El conjugado de un número real es el mismo número.

2. El conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número.

$$\overline{\overline{z}} = z$$

3. El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

4. El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados:

$$\overline{z\,w} = \overline{z}\;\overline{w}$$

5. El producto de un número complejo por su conjugado es un número real no negativo. Es decir, si $z = a + b\,i$, entonces $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$.

Demostración de 5. Si $z = a + b\,i$ tenemos que $\overline{z} = a - b\,i$ por lo tanto

$$z\,\overline{z} = (a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 - ab\,i + ba\,i - b^2\,i^2 = a^2 + b^2.$$

Definición 8 *Sea el número complejo $z \neq 0$, el **inverso multiplicativo** o simplemente el **inverso** de z es el número complejo w tal que $z\,w = 1$, a w se lo denota por z^{-1}.*

Ejemplo 5 *Calcular el inverso de los siguientes números complejos:*

1. $z = 1 - 2\,i$. *Debemos encontrar el número complejo $w = c + d\,i$ tal que $z\,w = 1$. Tenemos que*

$$1 = z\,w = (1 - 2\,i)\;(c + d\,i) = (c + 2d) + (d - 2c)\;i.$$

Entonces por la igualdad de números complejos tenemos que

$$c + 2d = 1 \quad y \quad d - 2c = 0,$$

resolviendo para c y d tenemos que

$$c = \frac{1}{5} \quad y \quad d = \frac{2}{5},$$

por lo tanto el inverso de z es

$$w = z^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

2. $z = a + b\;i$, *donde $z \neq 0$. Similarmente a la parte anterior, debemos encontrar el número complejo $w = c + d\,i$ tal que $z\,w = 1$. Tenemos que*

$$1 = z\,w = (a + b\,i)\;(c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\;i.$$

Entonces por la igualdad de números complejos tenemos que

$$ac - bd = 1 \quad y \quad ad + bc = 0,$$

resolviendo para c y d tenemos que

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad y \quad d = -\frac{b}{a^2 + b^2},$$

por lo tanto el inverso de z es

$$w = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i. \qquad (2)$$

Como z es un número arbitrario esta última igualdad nos sirve para encontrar el inverso de cualquier número complejo distinto de cero.

Observación. En la fórmula (2) observamos que el denominador de la parte real e imaginaria del inverso de z es un número real $\left(a^2+b^2\right)$, si usamos la propiedad 5 de conjugado de un número complejo, que es multiplicar en el denominador y numerador por el conjugado de z tenemos otra forma de calcular el inverso de z :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right) = \left(\frac{1}{a+bi}\right)\left(\frac{a-b\,i}{a-b\,i}\right) = \frac{(a-b\,i)}{(a+b\,i)\,(a-b\,i)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

<u>**Cociente**</u>:

Definición 9 *El **cociente** de dos números complejos $z = a+bi$ y $w = c+di$, donde $w \neq 0$, es*

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

Observaciones. 1. El cociente se puede calcular multiplicando el numerador por el inverso del denominador, es decir $\frac{z}{w} = z\,w^{-1}$.
2. Otra forma de calcular el cociente es usando el conjugado del denominador, así :

$$\frac{z}{w} = z\,w^{-1} = \frac{a+b\,i}{c+d\,i} = \frac{a+b\,i}{c+d\,i}\left(\frac{c-d\,i}{c-d\,i}\right) = \frac{(a+b\,i)\,(c-d\,i)}{(c+d\,i)\,(c-d\,i)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\;i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

Ejemplo 6 *Resolver los siguientes cocientes de números complejos:*

1. $\frac{1}{2-3i} = \frac{(2+3i)}{(2-3i)\,(2+3i)} = \frac{(2+3i)}{2^2+(-3)^2} = \frac{(2+3i)}{13} = \frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$

2. $\frac{3-i}{-1+4i} = \frac{(3-i)\,(-1-4i)}{(-1+4i)\,(-1-4i)} = \frac{(3\,(-1)-(-1)\,(-4))+(3\,(-4)+(-1)\,(-1))\,i}{(-1)^2+4^2} = \frac{(-3-4)+(-12+1)}{1+16} = -\frac{7}{17}-\frac{11}{17}i.$

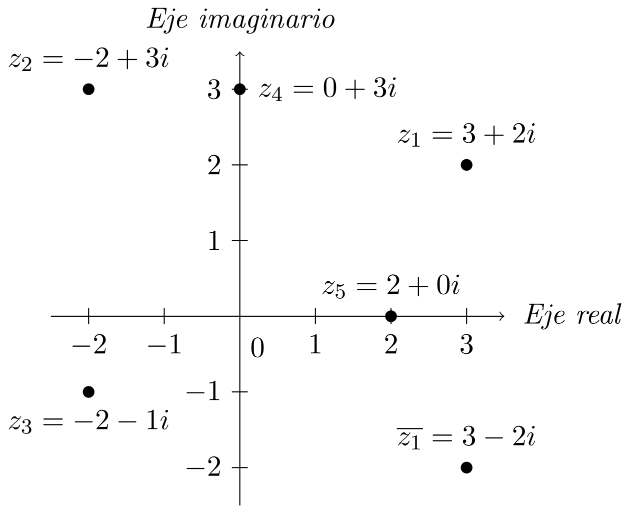
La siguiente tabla proporciona un resumen de algunas definiciones que usaremos, donde $z = a+b\;i$ y $w = c+d\;i$

Terminología	**Definición**
Número complejo	$a+b\;i$ donde a y b son reales e $i^2=-1$
Nro. imaginario puro	$a+b\;i$ cuando $a=0$
Igualdad, $z=w$	$a+b\;i=c+d\;i$ si y solo si $a=c$ y $b=d$
Suma, $z+w$	$(a+b\;i)+(c+d\;i)=(a+c)+(b+d)\;\;i$
Producto, $z.w$	$(a+b\;i)\,(c+d\;i)=(ac-bd)+(ad+bc)\;\;i$
Producto por un real k, $k.z$	$k\,(a+b\;i)=ka+(kb)\;\;i$
Resta, $z-w$	$(a+b\;i)-(c+d\;i)=(a-c)+(b-d)\;\;i$
Conjugado de z, $\overline{z}$	$\overline{a+b\;i}=a-b\;i$
Inverso de z, $z^{-1}=\frac{1}{z}$	$\frac{1}{a+b\;i}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\;i$
Cociente, $z.w^{-1}=\frac{z}{w}$	$\frac{a+b\;i}{c+d\;i}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\;i$

1.3 Forma polar o trigonométrica de un número complejo

Así como los números reales se pueden representar geométricamente en la recta, los números complejos se pueden representar en el plano[2]. Sea $z = a + bi$, lo representamos como el punto (a, b) del plano coordenado o plano complejo, el eje horizontal se lo denomina *eje real* y al vertical *eje imaginario.*

Ejemplo 7 *Representar en el plano los siguiente números complejos:*



Notemos que para representar el conjugado $\overline{z} = a - bi$ de un número complejo $z = a + bi$ solo hay que *reflejarlo* en el eje real.

Recordemos que el valor absoluto de un número real a, que se denota por $|a|$ es la distancia que hay al origen. En forma similar podemos decir que el valor absoluto de un número complejo $z = a + b\,i$, es la distancia del punto (a, b) al origen $(0, 0)$ del plano coordenado, es decir que

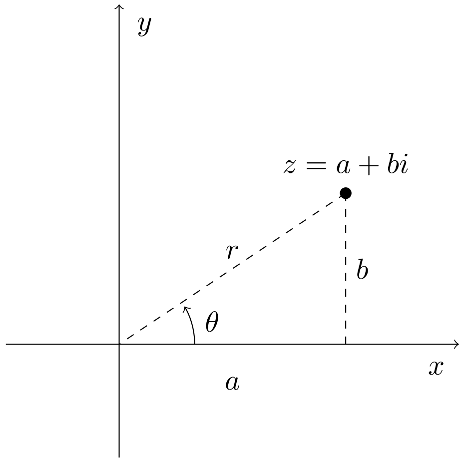
Definición 10 ***El módulo o valor absoluto*** *de* $z = a + b\,i$*, es* $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo 8 *Calcular el módulo de*

1. $|z_1| = |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$,
2. $|\overline{z_1}| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, *(note que* $|z_1| = |\overline{z_1}|$ *.)*
3. $|3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$,
4. $|2| = |2 + 0i| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$, *(note que ésta forma de calcular el módulo coincide con el cálculo del valor absoluto como número real.)*

Consideremos el número complejo $z = a + bi$ distinto de cero. Sea θ el ángulo medido en sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj, entre el eje horizontal x y el segmento que une el punto (a, b) con el origen,

[2]Fue John Wallis (1673) el primero en sugerir la representación gráfica de un número complejo, la cual no fue usada hasta 1800 por Karl F. Gauss.



Tenemos que se satisfacen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \\ \operatorname{sen}\,\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases} \qquad \textit{con } r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

vemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$, por lo tanto tenemos que

$$z = a + b\,i = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)\ i = r\,(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\,\theta)$$

notemos que $r = \sqrt{a^2+b^2}$, es el *módulo* de z, y θ se denomina *argumento de* z. De las infinitas posibilidades de elegir el ángulo θ, se restringe al intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ o $0° \leq \theta < 360°$

Formalmente tenemos que:

Definición 11 *El **argumento** de $z = a + b\,i$, es el número real θ*[3] *que satisface:*

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \operatorname{sen}\,\theta = \frac{b}{r},$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Usando el módulo y el argumento de un número tenemos otra forma de representar un número complejo que se la denomina forma polar, esta representación juega un rol fundamental ya que simplifica ciertas operaciones entre estos números. Formalmente

Definición 12 *La forma **polar o trigonométrica** de un número complejo $z = a + b\,i$ es*

$$z = r\,(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\,\theta) = r\operatorname{cis}\theta,$$

donde r es el módulo y θ el argumento de z.

Observación. Muchas veces tenemos que el número complejo nos queda $z = r\,(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\,\theta)$ donde θ no se encuentra entre 0 y 2π, en este caso θ **no** es el argumento de z, por lo tanto diremos que **no** es la forma polar o trigonomética de z. Para encontrar la forma polar o trigronomética hay que encontrar el argumento z reduciendo θ para que satisfaga que $0 \leq \theta < 2\pi$.

Ejemplo 9 *Encontrar la forma polar o trigonométrica de la siguiente números complejos:*

1. $z = 3\ \text{cis}\ 405°$. *Reducimos el ángulo:* $3\ \text{cis}\ 405° = 3\ \text{cis}\ (360° + 45°) = 3\ \text{cis}\ 45°$.
2. $w = 2\ \text{cis}\ (-30°)$. *Reducimos el ángulo:* $2\ \text{cis}\ (-30°) = 2\ \text{cis}\ (360° - 30°) = 2\ \text{cis}\ 300°$.

[3] El número real θ representa la medida en radianes del ángulo entre el eje real positivo y la semirecta que une el origen del plano con el número z. También usaremos la medida sexagesimal para medir el ángulo usando la relación que $2\pi = 360°$.

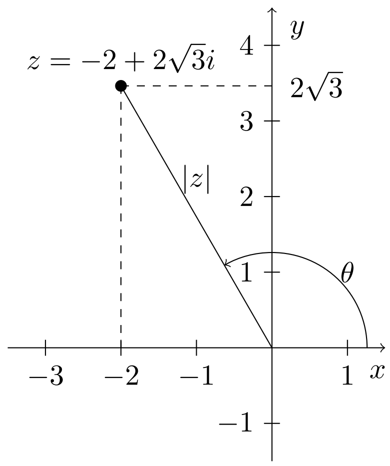
El argumento de un número complejo distinto de cero $z = a + b\,i$, se puede calcular usando las relaciones trigonométricas entre el seno, coseno y tangente

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & si \quad a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi & si \quad a > 0 \text{ y } b < 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & si \quad a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ o } 90^\circ & si \quad a = 0 \text{ y } b > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} \text{ o } 270^\circ & si \quad a = 0 \text{ y } b < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ejemplo 10 *Calcular la forma polar o trigonométrica de*

$$z = -2 + 2\sqrt{3}\,i.$$

Comenzamos por hacer la representación gráfica.



Calculemos el módulo y el argumento del número. Así, tenemos que el módulo es

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Para calcular θ, tenemos que

$$tg\,\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

como $a < 0$ por (3) $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$ (segundo cuadrante). Por lo tanto la forma polar de z es

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right).$$

Igualdad en forma polar:

Definición 13 *Dos números complejos $z = |z|(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)$ y $w = |w|(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$ son **iguales** cuando tienen igual módulo ($|z| = |w|$) y existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$ (o $\theta_2 = \theta_1 + k.360^\circ$). En el caso que ambos números complejos estén en forma polar ($0 \leq \theta_1 < 2\pi$ (o $0^\circ \leq \theta_1 < 360^\circ$) y $0 \leq \theta_2 < 2\pi$ (o $0^\circ \leq \theta_2 < 360^\circ$)) serán iguales cuando tienen igual módulo ($|z| = |w|$) y argumento ($\theta_1 = \theta_2$).*

Ejemplo 11 *Tenemos que los siguientes números complejos son iguales:*

$$3 \text{ cis } 405^\circ = 3 \text{ cis } 765^\circ = 3 \text{ cis } 4005^\circ = 3 \text{ cis } 45^\circ.$$

1.3.1 Operaciones en forma polar o trigonométrica

Multiplicación y cociente en forma polar:

Cuando los números complejos se expresan en forma polar, la multiplicación y la división se puede efectuar según lo indica el siguiente teorema:

Teorema 1 (Producto y cociente de números complejos) *Sean* $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \ \operatorname{sen}\ \theta_1)$ *y* $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \ \operatorname{sen}\ \theta_2)$ *entonces*

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \ \operatorname{sen}\ (\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

b) Si $z_2 \neq 0$, *entonces* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \ \operatorname{sen}\ (\theta_1 - \theta_2)) = \dfrac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

Demostración. Para realizar la demostración se usan las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 \pm \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \operatorname{sen}\ \theta_1 \operatorname{sen}\ \theta_2 \\ \operatorname{sen}\ (\theta_1 \pm \theta_2) &= \operatorname{sen}\ \theta_1 \cos\theta_2 \pm \operatorname{sen}\ \theta_2 \cos\theta_1 \end{aligned}$$

los detalles quedan como ejercicio de práctico. ■

Nota Usualmente se pide que el resultado del producto y/o cociente se dé en forma polar, para esto luego de aplicar el teorema anterior hay que reducir el ángulo resultante a un ángulo entre 0 y 2π.

Ejemplo 12 *Sea* $z_1 = 2 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$, *y* $z_2 = 3 \operatorname{cis} \dfrac{11\pi}{4}$. *Calcular en forma polar* $z_1 z_2$, *y* $\dfrac{z_1}{z_2}$.

a) $z_1 z_2 = 2(3) \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{11\pi}{4}\right) = 6 \operatorname{cis}(3\pi) = 6(\cos\pi + \operatorname{sen}\ \pi)$.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{3} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{11\pi}{4}\right) = \dfrac{2}{3} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{10\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{3} \operatorname{cis}(-5\pi) = \dfrac{2}{3}(\cos\pi + \operatorname{sen}\ \pi)$.

1.4 Potencias de números complejos

Usando la forma polar de un número complejo tenemos que para elevar a una potencia basta efectuar productos sucesivos

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ z^2 &= r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \\ z^3 &= r^3 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) \\ &\vdots \\ z^n &= r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \end{aligned}$$

La última igualdad se lo conoce como Teorema de De Moivre, formalmente

Teorema 2 (De Moivre) *Si* $z = r(\cos\theta + i \ \operatorname{sen}\ \theta)$ *y* n *un entero positivo entonces*

$$z^n = (r(\cos\theta + i \ \operatorname{sen}\ \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \ \operatorname{sen}\ n\theta).$$

Demostración. Se usa el método de Inducción Matemática, que se verá más adelante. ■

Nota Esta fórmula es también válida para exponentes enteros negativos, siempre que $z \neq 0$. En particular, tenemos una expresión para el inverso multiplicativo

$$z^{-1} = |z|^{-1} (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

Ejemplo 13 *Calcular* $\left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)^{12}$.

Primero escribimos el número complejo en forma polar y obtenemos que $z = -1 + \sqrt{3} i = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \ \operatorname{sen}\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
Luego cálculamos

$$z^{12} = 2^{12}\left(\cos 12 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \ \operatorname{sen}\ 12 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 4096(\cos 8\pi + i \ \operatorname{sen}\ 8\pi) = 4096.$$

Las **potencias de** i siguen un patrón que es útil conocer

$$\begin{array}{ll} i^1 = i & i^5 = i^4\, i = 1\, i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^4\, i^2 = 1\,(-1) = -1 \\ i^3 = i^2\, i = -i & i^7 = i^4\, i^3 = 1\,(-i) = -i \\ i^4 = i^2\, i^2 = (-1)\,(-1) = 1 & i^8 = i^4\, i^4 = 1, \end{array}$$

y así sucesivamente. Por tanto, las potencias de i se repiten cada cuarta potencia. Ésto da un método práctico para calcular cualquier potencia n de i, se obtiene dividiendo n por 4 y queda que $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división.

Ejemplo 14 *Evaluar:*

1. $i^{25} = i^{24}\, i = \left(i^4\right)^6\,(i) = 1\, i = i$
2. $i^{103} = i^{100}\, i^3 = \left(i^4\right)^{25}\,(-i) = 1\,(-i) = -i$
3. $i^n = i^{4c+r} = \left(i^4\right)^c\, i^r = 1\, i^r = i^r.$

1.5 Forma exponencial de un número complejo

Una variante de la forma polar o trigonométrica se obtiene usando la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Esto nos permite escribir un número complejo de la forma siguiente, denominada **forma exponencial**

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Esta fórmula es especialmente cómoda para expresar productos y cocientes ya que sólo hay que tener en cuenta las propiedades de la funciones exponenciales.
Observación Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
2. Si $z_2 \neq 0$, entonces $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$. En particular si $z_1 = 1$, tenemos que el inverso de z_2 es: $z_2^{-1} = \dfrac{1}{r_2} e^{i(2\pi-\theta_2)} = r_2^{-1} e^{i(2\pi-\theta_2)}$.
3. Para potencias con exponentes enteros tenemos $z^n = |z|^n\, e^{in\theta}$.

Ejemplo 15 *Sean* $z_1 = 2e^{i\pi}$ *y* $z_2 = 3e^{i\pi/3}$*, calcular*

1. $z_1 z_2 = 2e^{i\pi}\, 3e^{i\pi/3} = 6e^{i4\pi/3}$.
2. $z_2^{-1} = 2^{-1} e^{-i\pi/3} = \dfrac{1}{2} e^{i5\pi/3}$.

1.6 Raíces de un números complejos

Recordemos que en los números reales, la raíz $n-$ésima es la operación inversa de la potencia, para los números complejos se da una situación similar, formalmente:

Definición 14 *Un número complejo w es una raíz $n-$ésima del número complejo z si*

$$z = w^n\ . \tag{4}$$

Observación. Daremos un método para calcular las n raíces de z. Dado $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, denotamos con $w = s(\cos\beta + i \text{ sen } \beta)$ una de las raíces $n-$ésimas de z, entonces la ecuación (4) queda

$$\begin{aligned} r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) &= (s(\cos\beta + i \text{ sen } \beta))^n && \text{por } z = w^n \\ &= s^n(\cos n\beta + i \text{ sen } n\beta) && \text{por Teorema de De Moivre} \end{aligned}$$

por lo tanto usando la Definición 13, de igualdad en forma polar, tenemos que

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\beta = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

es decir que

$$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \\ \beta = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}. \end{cases}$$

Así tenemos para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right).$$

Observación. Si sustituimos $k = 0, 1, ...n - 1$, obtenemos n valores distintos de w, en la igualdad anterior, que se denominan raíces $n - \textit{ésimas}$ de z. Ningún otro valor de k, producirá una nueva raíz. Por lo tanto tenemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 3 (Raíces $n-$ésimas de un número complejo) *Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un número complejo. Si $z \neq 0$, existen n raíces enésimas complejas distintas de z dadas por la fórmula*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

donde $k = 0, 1, ..., n - 1$. Usando que $2\pi = 360°$ tenemos equivalentemente que

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360°k}{n}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{\theta}{n} + \frac{360°k}{n}\right)\right)$$

donde $k = 0, 1, ..., n - 1$.

Observación. Todas las raíces $n - \textit{ésimas}$ de z tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$, de aquí que si hacemos su repesentación geométrica de la $n-$raíces, éstas se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en 0, e igualmente espaciadas ya que la diferencia en los argumentos de las raíces sucesivas es de $\dfrac{2\pi}{n}$ o $\dfrac{360°}{n}$. Es decir, las raíces $n - \textit{ésimas}$ de z, son los vértices de un polígono regular inscripto en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y con ángulo central $\dfrac{2\pi}{n}$ o $\dfrac{360°}{n}$.

Ejemplo 16 *Hallar las raíces terceras de $z = -1 + \sqrt{3}\, i$ y representar gráficamente las raíces.*

Primero representamos a $z = -1 + \sqrt{3}i$ en forma polar con grados.

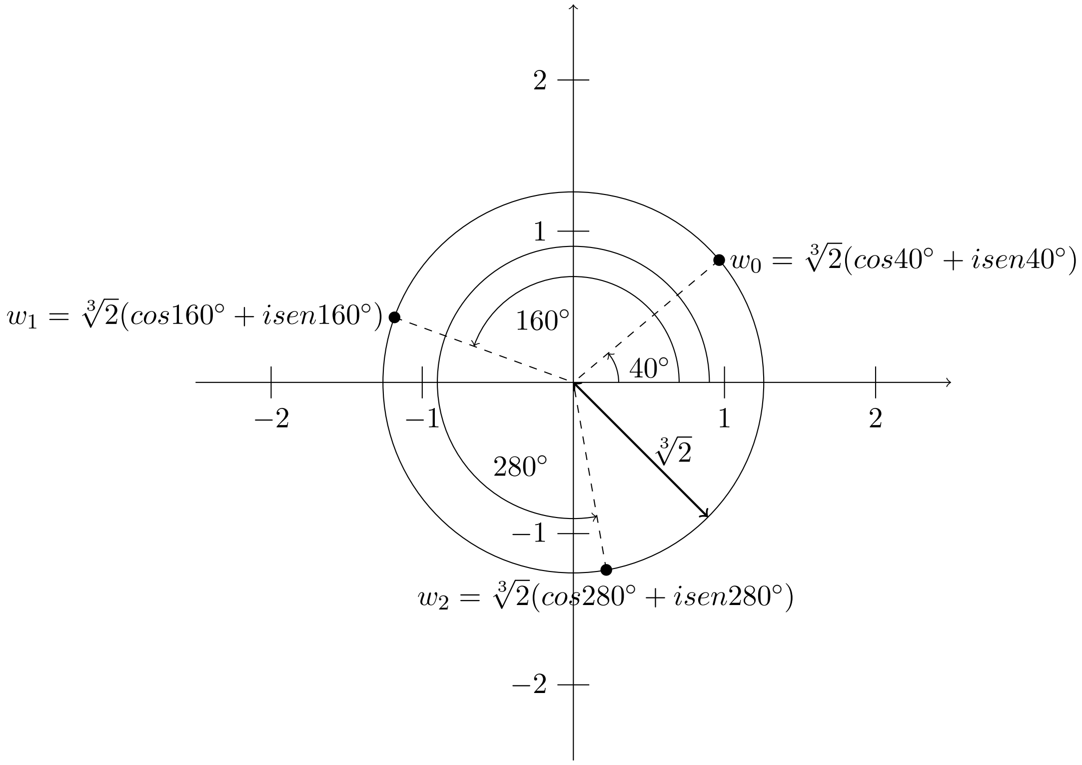
$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120° + i \text{ sen } 120°).$$

En este caso $n = 3$, por lo tanto tenemos

$$w_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{120°}{3} + \frac{360°k}{3}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{120°}{3} + \frac{360°k}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}(\cos(40° + 120°k) + i \text{ sen } (40° + 120°k))$$

donde $k = 0, 1, 2$. Es decir que

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{2}(\cos(40° + 120°0) + i \text{ sen } (40° + 120°k)) &&= \sqrt[3]{2}(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°) \\ w_1 &= \sqrt[3]{2}(\cos(40° + 120°1) + i \text{ sen } (40° + 120°1)) &&= \sqrt[3]{2}(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°) \\ w_2 &= \sqrt[3]{2}(\cos(40° + 120°2) + i \text{ sen } (40° + 120°2)) &&= \sqrt[3]{2}(\cos 280° + i \operatorname{sen} 280°) \end{aligned}$$



Ejemplo 17 *Resolver la ecuación* $z^4 - 1 = 0$.

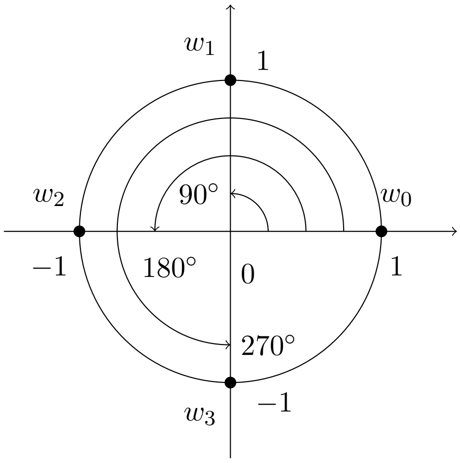
Si escribimos la ecuación equivalente $z^4 = 1$, vemos que las soluciones de la primera ecuación son las cuatro raíces cuartas del número complejo 1.

Escribiendo 1, en forma polar, tenemos que $z = 1 = 1\,(\cos 0° + i \ \text{sen}\ 0°)$ y $n = 4$, por lo tanto

$$w_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0° + 360°k}{4} + i\ \text{sen}\ \frac{0° + 360°k}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{360°k}{4} + i\ \text{sen}\ \frac{360°k}{4}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3$. Es decir que las cuatro soluciones de la ecuación son

$$\begin{array}{lll} w_0 & = 1\,(\cos 0° + i\,\text{sen}\,0°) & = 1 + 0i = 1 \\ w_1 & = 1\,(\cos 90° + i\,\text{sen}\,90°) & = 0 + 1i \\ w_2 & = 1\,(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°) & = -1 - 0i \\ w_3 & = 1\,(\cos 270° + i\,\text{sen}\,270°) & = 0 - 1i. \end{array}$$



Ahora resolvemos la ecuación 1 dada al comienzo de la unidad.

Ejemplo 18 *Resolver la ecuación* $x^2 = -1$.

Escribiendo -1, en forma polar, tenemos que $z = -1 = 1\,(\cos 180° + i \operatorname{sen}180°)$ y $n = 2$, por lo tanto

$$w_k = \sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{180° + 360°k}{2} + i\ \operatorname{sen}\frac{180° + 360°k}{2}\right) = 1\,(\cos 90° + 180°k + i\ \operatorname{sen} 90° + 180°k)$$

donde $k = 0, 1$. Es decir, que las dos soluciones de la ecuación son

$$\begin{array}{lll} w_0 & = 1\,(\cos 90° + i\ \operatorname{sen} 90°) & = 0 + 1\,i = i \\ w_1 & = 1\,(\cos 270° + i\ \operatorname{sen} 270°) & = 0 - 1\,i = -i \end{array}$$

Ejemplo 19 *Sea p un número real positivo, resolver la ecuación $x^2 = -p$.*

Este ejemplo se puede resolver en forma similar al anterior, se deja como ejercicio. Lo hacemos usando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado. Haciendo pasaje de términos tenemos que $x^2 = -p$, se puede escribir como

$$x^2 + 0x + p = 0, \tag{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot p}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{-1.4.p}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{p}\sqrt{-1}}{2} = \pm\sqrt{p}\sqrt{-1}.$$

Así tenemos que las soluciones son:

$$x_1 = \sqrt{p}i \text{ y } x_2 = -\sqrt{p}i.$$

Verifiquemos que x_1 es solución de la ecuación (5)

$$x_1^2 + p = (\sqrt{p}i)^2 + p = (\sqrt{p})^2\,i^2 + p = p\,(-1) + p = -p + p = 0.$$

En forma similar tenemos que x_2 también es solución de la ecuación (5)

$$x_2^2 + p = (-\sqrt{p}i)^2 + p = (-1)^2\,(\sqrt{p})^2\,i^2 + p = p\,(-1) + p = -p + p = 0.$$

Observación. Otra aplicación de los números complejos es que se puede resolver ecuaciones del tipo $x^n + p = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$ *y* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 20 *Resolver la ecuación de segundo grado*

$$3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Usando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado tenemos que

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 60}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{6}.$$

Por Teorema 3 las raíces cuadradas del número complejo $z = -44$ son:

$$z_1 = \sqrt{44}\,i \ y \ z_2 = -\sqrt{44}\,i.$$

Luego

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & \dfrac{-4 + \sqrt{-44}}{6} = -\dfrac{4}{6} + \dfrac{\sqrt{44}\,i}{6} = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{11}\,i \\ x_2 & = & \dfrac{-4 - \sqrt{-44}}{6} = -\dfrac{4}{6} - \dfrac{\sqrt{44}\,i}{6} = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{11}\,i. \end{array}$$

Observación. A diferencia de los números reales, con los números complejos se pueden resolver cualquier ecuación pólinómica.En particular, los números complejos resuelven **cualquier** ecuación de segundo grado mientras que con los números reales solo se resuelven, aquellas en la que el discriminante es no negativo.