# Unidad 4: Vectores

## 4.1 Introducción

En este capítulo daremos el concepto de *vector*, el cual es una herramienta fundamental tanto para la *física* como para la *matemática*.

La historia de los vectores se remonta al año 1843, cuando el matemático William Hamilton descubrió un nuevo sistema de números que venia a extender el sistema de los números complejos. Eran los cuaternios. Así como todo número complejo es de la forma $a + bi$, un cuaternio es una expresión de la forma

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

donde $a, b, c, d$ son números reales e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son objetos que satisfacen ciertas reglas bien definidas. Los cuaternios encontraron pronto aplicaciones físicas interesantes, pero no resultaban fáciles de manejar. Los físicos Gibbs y Heaviside a fines de siglo XIX decidieron facilitar la aplicación de los cuaternios de Hamilton tomando de ellos solamente la parte no real, $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Resultaba así un objeto matemático que Gibbs lo llamó *vector*.

Comenzaremos el estudio de los vectores en forma geométrica, el cual es un segmento caracterizado por su longitud (o módulo), dirección y sentido (u orientación). Posteriormente, estudiaremos los vectores en forma algebraica, es decir, hablaremos de vectores del plano $\mathbb{R}^2$, espacio $\mathbb{R}^3$, y en general de $\mathbb{R}^n$. Si bien sólo podemos visualizar vectores en dos y tres dimensiones los vectores de un espacio $n-$*dimensional* son útiles para representar y manipular información eficientemente.

## 4.2 Vectores: enfoque geométrico

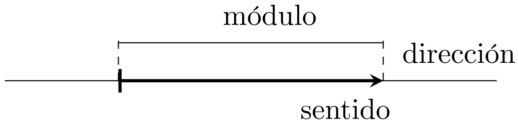
### 4.2.1 Definiciones y notación

Llamamos *magnitud física* a toda aquella propiedad de un cuerpo que puede ser medida. La masa, el volumen, la velocidad o la temperatura son magnitudes físicas. El aroma o la simpatía, puesto que no pueden medirse, no son magnitudes físicas.

Para muchas magnitudes físicas, basta con indicar su valor para que estén perfectamente definidas. Así, por ejemplo, si decimos que José tiene una temperatura de 38 $^o$C, sabemos perfectamente que tiene fiebre y si Rosa mide 165 cm de altura y su masa es de 45 kg, está claro que es delgada. Cuando una magnitud queda definida por su valor, un número acompañado de una unidad, recibe el nombre de *magnitud escalar*.

Otras magnitudes, con su valor numérico, no nos suministran toda la información. Así si nos dicen que Daniel corre a 20 km/h apenas sabemos algo más que al principio. Deberían informarnos también desde donde corre y hacia qué lugar se dirige. Estas magnitudes que, además de un valor numérico, se describen señalando también una dirección y un sentido se llaman *magnitudes vectoriales* y se representan mediante *vectores*. Podemos visualizar un vector (en el plano o en el espacio tridimensional) como un segmento de recta dirigido o una flecha.

Así cada vector queda identificado por tres características fundamentales: *módulo* o *longitud*, *dirección* y *sentido*.



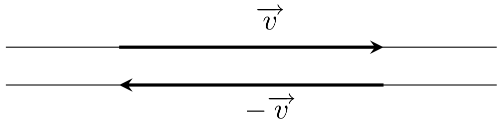

**Módulo** de un vector es la *longitud* del segmento que lo representa.
**Dirección** de un vector es la *recta* a la cual pertenece o cualquier *recta paralela* a ésta.
**Sentido** de un vector está dado por la *orientación* del segmento que lo representa. Cuando lo representamos por una flecha, el sentido está dado por donde apunta la punta de la flecha

**Notación**: Usaremos $\overrightarrow{AB}$ para denotar el vector con *punto inicial* $A$ y *punto final* $B$. Usaremos $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ o **u**, **v**, **w**, para denotar vectores cuyos puntos extremos no están especificados a los que denominaremos vectores libres.

El *módulo* de un vector se indica con la letra que designa al vector entre barras. Así, el módulo del vector $\overrightarrow{v}$ se denota $\left|\overrightarrow{v}\right|$.

El vector con módulo cero o simplemente vector *nulo* se lo denota por $\overrightarrow{0}$, **0** o $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Si dos vectores tienen la igual dirección y módulo pero sentido opuesto decimos que son *vectores opuestos,* y denotamos al opuesto de $\overrightarrow{v}$ por $-\overrightarrow{v}$.




**Vectores iguales**

Dos vectores son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido (aunque difieran en su posición, es decir, en sus punto de aplicación). Por lo tanto, si dos vectores se diferencian en cualquiera de los tres elementos (módulo, dirección o sentido) los consideraremos distintos.

**Ejemplo 1** *Si sobre dos cuerpos distintos se aplican fuerzas verticales descendentes de* 10 $N$ *(newtons) ambas fuerzas se representan mediante "el mismo vector"pues a pesar de tener distintos puntos de aplicación, tienen igual dirección (vertical) , sentido (descendente) y módulo* (10 $N$).

### 4.2.2 Operaciones con vectores

**Multiplicación por escalares**

Dado un vector $\overrightarrow{v}$ y un número real (escalar) $\lambda$, podemos obtener otro vector

$$\overrightarrow{\lambda v} = \lambda \overrightarrow{v}$$

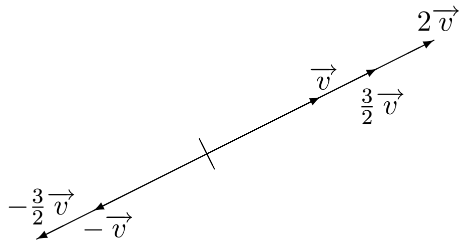
con la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ . Si $\lambda > 0$, tiene el mismo sentido, pero si $\lambda < 0$, el sentido será opuesto. Además; El módulo es

$$\left|\lambda \overrightarrow{v}\right| = |\lambda| \left|\overrightarrow{v}\right|,$$

donde "$|\lambda|$" es el valor absoluto del número real $\lambda$.

**Ejemplo 2** *Si un coche se desplaza a 25 km/h y otro a 50 km/h, en la misma carretera, el vector que representa al segundo tendrá un módulo igual al doble que la del primero.*

**Ejemplo 3** *Dado el vector* $\overrightarrow{v}$, *obtener gráficamente:* $2\overrightarrow{v}$, $-\overrightarrow{v}$, $\frac{3}{2}\overrightarrow{v}$, $-\frac{3}{2}\overrightarrow{v}$




**Suma de vectores**

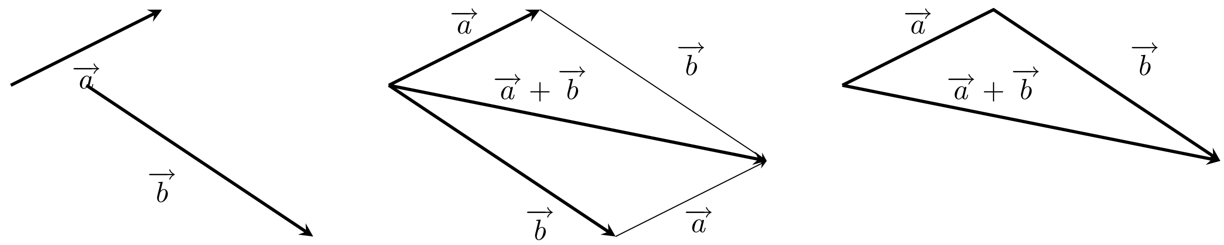
Para realizar la suma gráfica de dos vectores, utilizamos el "método del paralelogramo" o el "método del poligono". Estos métodos nos permiten sumar vectores en forma gráfica, posteriormente cuando identifiquemos los vectores en un sistema de referencia definiremos la suma analítica, a través de sus *coordenadas.*

#### Método del paralelogramo para la suma de vectores

Dados dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, si aplicamos el método del paralelogramo para sumarlos, debemos considerar dos vectores iguales, a los dados, que se unen en su origen. Luego se dibuja un paralelogramo que tiene a ambos vectores como lados adyacentes, siendo la diagonal, del paralelogramo, la dirección del vector suma, cuyo origen coincide con el origen de los dos vectores.

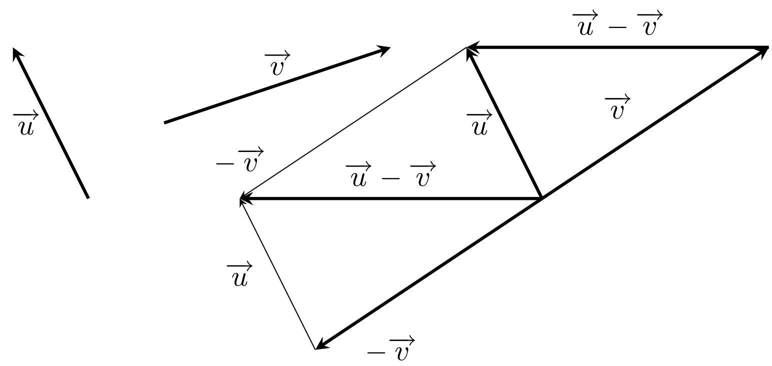
#### Método del polígono para la suma de vectores

Dados dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, si aplicamos el método del polígono para sumarlos, debemos considerar dos vectores iguales a los dado donde un vector sigue al otro (sin importar el orden). El vector resultante tiene como origen el punto de partida del primero y como extremo el último vector.




Método del paralelogramo Método del polígono

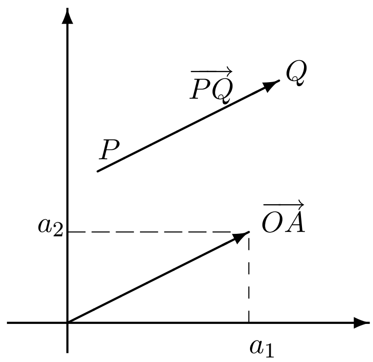
**Resta de vectores** Para restar un vector $\overrightarrow{v}$ de un vector $\overrightarrow{u}$ simplemente se suma $\overrightarrow{u}$ con el opuesto a $\overrightarrow{v}$, es decir, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(-1)\,\overrightarrow{v}$




## 4.3 Vectores: enfoque algebraico

Los problemas con vectores se pueden simplificar introduciendo un *sistema de coordenadas rectangulares* (plano $\mathbb{R}^2$, espacio $\mathbb{R}^3$ o en general $\mathbb{R}^n$), y sea $\overrightarrow{PQ}$ un vector cualquiera del espacio de vectores $V$, se puede ver que existe un único vector $\overrightarrow{OA}$, igual al vector $\overrightarrow{PQ}$, con punto inicial en el origen de coordenadas "$O$" y punto final el punto $A$. En este sentido, cada vector determina una única $n-$upla de números reales, que son las coordenadas $(a_1,..,a_n)$ del punto $A$. Por lo contrario toda $n-$upla de números reales $(a_1,..,a_n)$, determina el vector $\overrightarrow{OA}$. Por ello a cada vector le vamos asociar un $n-$upla de números $(a_1,..,a_n)$ que denominaremos **coordenadas** del vector $\overrightarrow{v}$,y lo notaremos como un vector columna o vector fila:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OA}=(a_1,..,a_n) \qquad \text{o} \qquad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$




Si consideramos todos los vectores con el mismo origen tenemos.

**Proposición 1** *Sea* $\overrightarrow{v} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\overrightarrow{w} = (\beta_1, ..., \beta_n)$, *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces*

1. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ *si y solo si para cada* $i = 1, 2, ..., n$, $\alpha_i = \beta_i$, *es decir* $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$.
2. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$.
3. $\lambda \overrightarrow{v} = \lambda (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n)$.

No demostraremos estos resultados. El punto 1, dice que dos vectores son iguales cuando tienen las mismas coordenadas. 2, dice que para sumar dos vectores se suman las coordenadas correspondientes y el punto 3, dice que cuando multiplicamos un escalar por un vector se multiplica cada coordenada por el escalar.

**Ejemplo 4** *Dado los vectores* $\overrightarrow{u} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{v} = (-2, 1, 1)$ *y* $\overrightarrow{w} = (0, 3, 1)$. *Calcular:* $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$. *Tenemos que:*

$$\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = (1, 0, 2) + 2(-2, 1, 1) = (1, 0, 2) + (-4, 2, 2) = (-3, 2, 1)$$

*Similarmente*

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = (1, 0, 2) - (0, 3, 1) = (1, -3, 1).$$

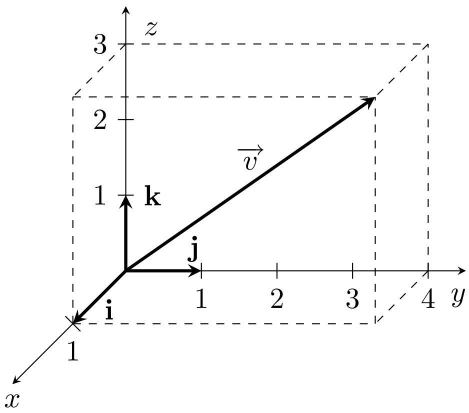
**Observación:** Los siguientes vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, donde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0) \qquad \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0) \qquad \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1),$$

se los denomina **base estandar o canónica** y a los vectores se los llama también **versores**. En el plano $\mathbb{R}^2$, a $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ se lo denota por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ respectivamente; mientras que en el espacio $\mathbb{R}^3$, a $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ se lo denota por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ respectivamente.

**Observación:** Si $\overrightarrow{v} = (a_1, ..., a_n)$ entonces $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i$.

**Ejemplo 5** $\overrightarrow{v} = (1,4,3)$ *lo podemos escribir* $\overrightarrow{v} = 1\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

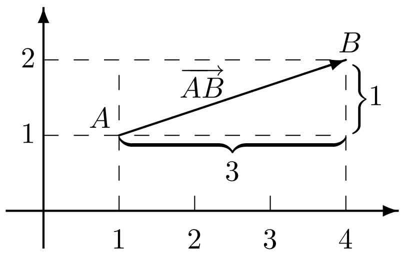



**Vector con punto inicial $A$ y punto final $B$**

**Ejemplo 6** *Dado los puntos $A = (1,1)$ y $B = (4,2)$, determinar el vector con origen en $A$ y extremo en $B$, este vector será $\overrightarrow{AB}$ (de $A$ hasta $B$). Resulta interesante destacar que las coordenadas de los puntos $A$ y $B$, determinan un triángulo rectángulo, de manera que su módulo puede calcularse aplicando el teorema de Pitágoras. De manera que la longitud de cada cateto coincide con el valor que debería tener el vector si su origen fuera el centro de coordenadas. Es así que al hacer:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,2) - (1,1) = (3,1)$$

*determinamos un vector equivalente al vector de $A$ hasta $B$.*

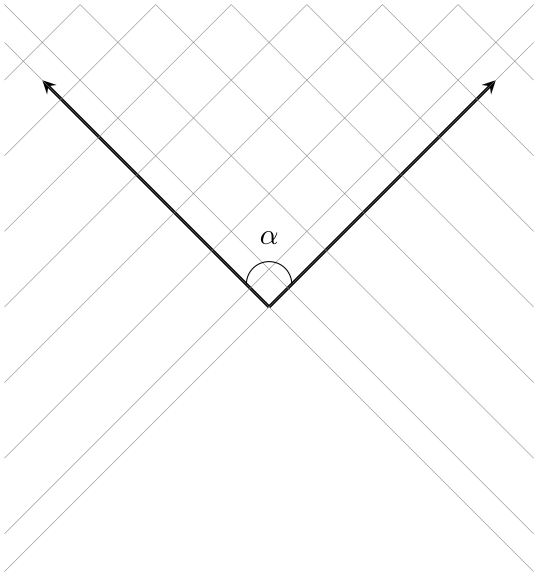



El ejemplo anterior se puede generalizar a puntos y vectores de $\mathbb{R}^n$. Dado los puntos $A = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $B = (\beta_1,$ el vector $\overrightarrow{AB}$ lo calcularemos haciendo la diferencia del vector $\overrightarrow{OB}$ menos el vector $\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) - (\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n)$$

## 4.4 Ángulo entre dos vectores

Los vectores pertenecen a una recta que determina su dirección. Estas rectas, a su vez, dividen al plano en dos; cada una de "esas partes" constituye un semiplano. Si tenemos dos vectores que no son colineales, cada una de las rectas determina un semiplano (uno por cada recta); la intersección de ambos semiplanos determina el ángulo que se encuentra entre ambos.




El valor del ángulo está acotado entre los valores $0^o$ y $180^o$ . Si el ángulo es de $90^o$ los decimos que los vectores son *perpendiculares* u *ortogonales* y usamos el símbolo "$\perp$", así usamos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ para decir que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares u ortogonales.

### 4.4.1 Vectores en $\mathbb{R}^2$ en términos de su módulo, dirección y sentido

Como dijimos al comienzo muchas aplicaciones describen a los vectores en términos de su módulo, dirección y sentido y no en términos de sus componentes. Un vector en el plano puede ser expresado por su módulo y el ángulo que forma con el eje positivo $x$, notemos que el ángulo nos dice cual es la dirección y el sentido, por ejemplo, si el ángulo que forma un vector con el eje positivo es de 60° y otro es de 240°, ambos vectores están en la misma dirección pero tienen sentido opuesto, en general cualquier par de vectores que difieren en 180° tiene sentido opuesto. Dado un vector $\overrightarrow{v}$ no nulo y el ángulo $\alpha$ entre $\overrightarrow{v}$ y el semieje $x$ positivo, para expresar $\overrightarrow{v}$ en términos de $|\overrightarrow{v}|$ y $\alpha$, primero determinamos el vector unitario (vector cuyo módulo es 1) $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$ :

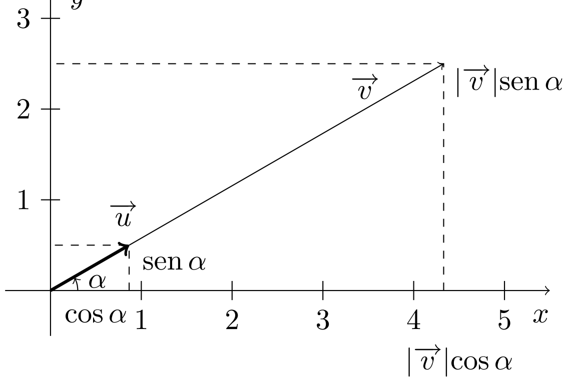
$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} \text{ entonces } \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|\ \overrightarrow{u}.$$

Observamos (ver figura) que las coordenadas del punto final de $\overrightarrow{u}$ son $(\cos\alpha, sen\alpha)$, de modo que

$$\overrightarrow{u} = cos\,\alpha\ \mathbf{i} + sen\,\alpha\ \mathbf{j}$$

y

$$\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|\ (cos\,\alpha\ \mathbf{i} + sen\,\alpha\ \mathbf{j}) \tag{1}$$

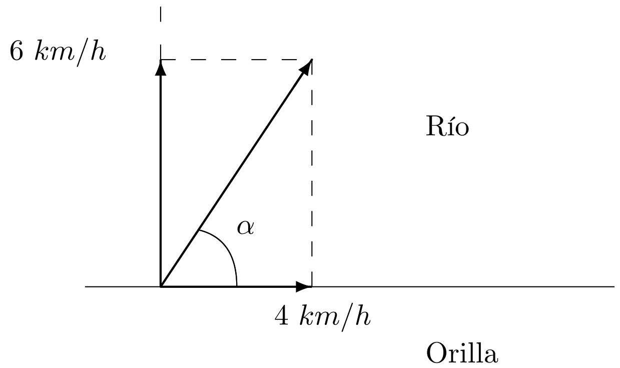


**Ejemplo 7** *Una fuerza de 5 kilos se aplica en una dirección que forma un ángulo de* $30°$ *con el eje* $x$ *positivo. Expresar* $\overrightarrow{F}$ *en términos de* $\mathbf{i}$ *y* $\mathbf{j}$.

El módulo de la fuerza $\overrightarrow{F}$ es $\left|\overrightarrow{F}\right| = 5$, y forma un ángulo con el eje $x$ positivo de $\alpha = 30°$. Así tenemos que (1),

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= |\overrightarrow{F}|\,(cos\,\alpha\ \mathbf{i} + sen\,\alpha\ \mathbf{j}) = 5\,(\cos 30°\ \mathbf{i} + sen\,30°\ \mathbf{j}) \\ &= 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 8** *Un nadador quiere atravesar un río. Nada a una velocidad de 6km/h, en dirección perpendicular a la orilla, pero la corriente lo desplaza con un velocidad de 4km/h. Representar gráficamente la velocidad del nadador, determinar el módulo y el ángulo que forma con la orilla el vector resultante del desplazamiento del nadador.*




*Aplicando Pitágoras el modulo del vector* $\overrightarrow{v}$*, resultante es* $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}$*, y como* $\tan\alpha = \dfrac{6}{4}$ *entonces el ángulo que forma con la orilla es* $\alpha = \arctan\dfrac{3}{2} = 56^o$.

## 4.5 Producto de vectores

Hay dos tipos de producto entre vectores, uno señalado con un punto,“$\cdot$” llamado *producto punto, escalar o interno* entre vectores. Otro señalado con un cruz, “$\times$” llamado el *producto vectorial o producto cruz.*

### 4.5.1 Producto escalar (o interno)

**Definición 1** *Dado dos vectores* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$ *llamaremos* ***producto escalar*** *de* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$ *al* ***número real*** *determinado por:*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\ |\overrightarrow{v}|\ cos\ \theta$$

*Siendo* $\theta$ *el ángulo entre ambos vectores.*

**Propiedades**

Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ (escalares) entonces se cumplen las siguientes propiedades.

**P1)** Módulo: $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}$ y $\left(\dfrac{1}{|\overrightarrow{u}|}\ \overrightarrow{u}\right)$ es un vector unitario, es decir que cualquier vector (no nulo) dividido por su módulo es un vector unitario $\left(\left|\dfrac{1}{|\overrightarrow{u}|}\ \overrightarrow{u}\right| = \dfrac{1}{|\overrightarrow{u}|}\ |\overrightarrow{u}| = 1\right)$.

**P2)** Propiedad conmutativa: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

**P3)** Propiedad asociativa: $(\lambda\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = \lambda\,(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

**P4)** Propiedad distributiva: $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

**P5)** Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero. Recíprocamente, si el producto escalar de dos vectores es cero, ó bien uno de los vectores es el vector $\overrightarrow{0}$, ó ambos vectores son perpendiculares.

Las propiedades P1, P2, P3, son consecuencia inmediata de la definición de producto escalar y quedan como ejercicios. La Propiedad P4, no la demostraremos en este curso.

Probemos la propiedad P5:

1.- Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ vectores perpendiculares, entonces el ángulo entre ambos vectores es $\theta = 90°$ y $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\, cos\ 90° = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\ 0 = 0$.

2.- Recíprocamente, si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\, cos\ \theta = 0$ entonces $|\overrightarrow{u}| = 0$ ó $|\overrightarrow{v}| = 0$, ó $cos\ \theta = 0$ entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ó ambos vectores son perpendiculares.

**Proposición 2** *Si $\overrightarrow{u} = (a_1, ..., a_n)$ y $\overrightarrow{v} = (b_1, ..., b_n)$, el producto escalar entre ambos puede hallarse mediante la sumatoria del producto de cada una de sus coordenadas, es decir*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

**Demostración.** La realizamos para vectores en el plano, pero vale en general. Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ los versores del plano $\mathbb{R}^2$, se cumple que $\overrightarrow{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ y $\overrightarrow{v} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$, entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \ & (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \cdot (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \underset{\text{por P4}}{=} \\ & (a_1\mathbf{e}_1) \cdot (b_1\mathbf{e}_1) + (a_1\mathbf{e}_1) \cdot (b_2\mathbf{e}_2) + (a_2\mathbf{e}_2) \cdot (b_1\mathbf{e}_1) + (a_2\mathbf{e}_2) \cdot (b_2\mathbf{e}_2) \underset{\text{por P3}}{=} \\ & a_1b_1\,(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + a_1b_2\,(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + a_2b_1\,(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + a_2b_2\,(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)\,.\end{aligned}$$

Pero (completar detalles)

$$\overrightarrow{\mathbf{e}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_1} = |\overrightarrow{\mathbf{e}_1}|^2 = 1; \qquad \overrightarrow{\mathbf{e}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_2} = |\overrightarrow{\mathbf{e}_2}|^2 = 1 \qquad \overrightarrow{\mathbf{e}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_2} = \overrightarrow{\mathbf{e}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_1} = 0.$$

Reemplazando tenemos que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

**Ejemplo 9** *Verificar que los vectores $\overrightarrow{u} = (3, 2)$ y $\overrightarrow{v} = (-4, 6)$ son ortogonales en $\mathbb{R}^2$.*

Solución. Como las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son $(3, 2)$ y $(-4, 6, )$ respectivamente, entonces por la proposición anterior resulta:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (3, 2) \cdot (-4, 6, ) = 3.\,(-4) + 2.6 = 0$$

por lo tanto por P5, los vectores son ortogonales.

**Observación.** Si $\overrightarrow{u} = (a_1, ..., a_n)$, por la proposición anterior tenemos una fórmula para calcular el módulo de un vector es decir $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$

**Ejemplo 10** *Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ donde $\overrightarrow{u} = (2, -3)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 4)$. Calcular:*

1. *Su producto escalar.*
2. *El módulo de cada vector.*
3. *El ángulo que forman*
4. *¿Cuánto tiene que valer $x$ para que $\overrightarrow{w} = (x, 1)$ sea unitario y ortogonal a $\overrightarrow{u}$?.*

*Solución*

1. *Producto escalar: Como* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=u_1v_1+u_2v_2$ *reemplazando* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=2.1+(-3).4=-10$

2. *Módulo de cada vector: Como* $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$ *reemplazando* $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$, *en forma similar* $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

3. *Ángulo entre los vectores: Como* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\cos\theta$ *entonces* $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|}$, *reemplazando tenemos que* $\cos\theta=\dfrac{-10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$ *luego* $\theta=132°16'$.

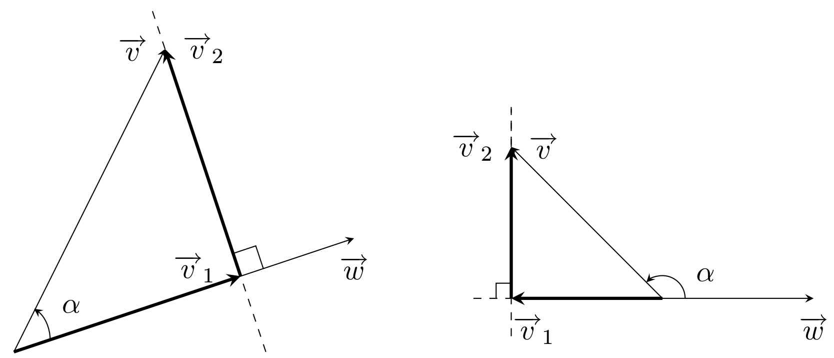
4. *Por la condición de ortogonalidad, para que* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{w}$ *sean ortogonales su producto escalar debe valer cero, por lo tanto calculamos el producto escalar* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=u_1w_1+u_2w_2=2.x+(-3).1$ *e igualamos a* $0$, *es decir que* $2x-3=0$, *resolviendo esta ecuación para la variable* $x$ *tenemos que* $x=\dfrac{3}{2}$. *Así obtenemos que el vector* $\left(\frac{3}{2},1\right)$ *es ortogonal a* $\overrightarrow{u}$.
   *Para obtener un vector unitario dividimos por su módulo* $\left|\left(\frac{3}{2},1\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}\neq 1$, *por lo tanto*
   $$\overrightarrow{w}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}}\left(\frac{3}{2},1\right)=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right),$$
   *es unitario y ortogonal a* $\overrightarrow{u}$.

### 4.5.2 Proyección de un vector sobre otro

Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ dos vectores **no nulos**, considerados en un mismo origen, queremos descomponer $\overrightarrow{v}$ en dos vectores: $\overrightarrow{v_1}$ , en la *misma dirección* que $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{v_2}$ en la dirección *perpendicular* u *ortogonal* a $\overrightarrow{w}$. El vector $\overrightarrow{v_1}$ es la *proyección vectorial de* $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$ y se denota $\boldsymbol{proy}_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$.

**Construcción de los vectores $\overrightarrow{v}_1$ y $\overrightarrow{v}_2$.**

Dibujamos ambos vectores en un origen común, trazamos una recta perpendicular a la recta que contiene al vector $\overrightarrow{w}$, y que pasa por el punto final de $\overrightarrow{v}$. Así obtenemos el punto final del vector $\overrightarrow{v}_1$ y el origen es el punto común a ambos vectores. El vector $\overrightarrow{v}_2$ esta dado por $\overrightarrow{v}_2=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}_1$.




observamos que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2$, como $\overrightarrow{v}_2$ ortogonal a $\overrightarrow{w}$ entonces $\overrightarrow{v}_2\cdot\overrightarrow{w}=0$, y por las propiedades de producto escalar tenemos
$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2)\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}_2\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}_1\cdot\overrightarrow{w}\qquad(2)$$
también se cumple que $\overrightarrow{v}_1$ paralelo a $\overrightarrow{w}$, es decir que $\overrightarrow{v}_1=\lambda\overrightarrow{w}$ para algún escalar $\lambda\in\mathbb{R}$. Reemplazando en la ecuación (2):
$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}=\lambda\,|\overrightarrow{w}|^2$$

despejando $\lambda$

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2}.$$

Entonces tenemos que $\overrightarrow{v}_1$ es

$$\overrightarrow{v}_1 = \lambda \overrightarrow{w} = \left( \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2} \right) \overrightarrow{w}$$

y se lo denomina la **proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$**,

$$\overrightarrow{v_1} = \boldsymbol{proy}_{\overrightarrow{w}}\, \overrightarrow{v} = \left( \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2} \right) \overrightarrow{w}. \tag{3}$$

Por lo tanto la descompuesto el vector $\overrightarrow{v}$ en dos vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$, donde $\overrightarrow{v_1}$ es paralelo a $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{v_2}$ es perpendicular a $\overrightarrow{w}$, es:

$$\overrightarrow{v_1} = \boldsymbol{proy}_{\overrightarrow{w}}\, \overrightarrow{v} = \left( \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2} \right) \overrightarrow{w} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_1}$$

**Ejemplo 11** *Determinar la proyección vectorial de* $\overrightarrow{v} = (1,3)$ *sobre* $\overrightarrow{w} = (1,-1)$.

Por la fórmula (3), tenemos

$$\overrightarrow{v_1} = \boldsymbol{proy}_{\overrightarrow{w}}\, \overrightarrow{v} = \left( \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2} \right) \overrightarrow{w} = \left( \frac{1.1 + 3.(-1) + (-1)\,1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \right) \overrightarrow{w} = (-1)\, \overrightarrow{w} = (-1,1)$$

**Propiedad**

Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores entonces la $\boldsymbol{proy}_{\overrightarrow{w}}\, \overrightarrow{v}$ es un vector de igual dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{w}$ si el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es menor que $90°$, y sentido opuesto si el ángulo es mayor que $90°$. Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición de producto escalar.

### 4.5.3 Producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$

**Matrices y determinantes** Antes de definir el producto vectorial introduciremos matrices y determinantes. Una matriz de tamaño $m \times n$, es un arreglo o tabla de números con $m$ filas y $n$ columnas. Los siguientes son ejemplos de matrices de tamaño $2 \times 2$, $2 \times 3$ y $3 \times 3$ respectivamente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & -1+\pi & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden $2 \times 2$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ de orden de $3 \times 3$, es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

**Propiedades** Los determinantes cumplen las siguientes propiedades:

1. Si a una matriz de $2 \times 2$ se le intercambia una fila o una columna entonces el determinante tenemos solo cambia el signo.

2. Si una matriz de $2 \times 2$ tiene dos filas o columnas, iguales entonces el determinante es 0.

3. Si una matriz de $2 \times 2$ tiene una fila que es múltiplo de otra, entonces el determinante es 0.

4. Si a una matriz de $3 \times 3$ se le intercambia una fila o una columna entonces el determinante tenemos solo cambia el signo.

5. Si una matriz de $3 \times 3$ tiene dos filas iguales entonces el determinante es 0.

6. Si una matriz de $3 \times 3$ tiene una fila que es múltiplo de otra entonces el determinante es 0.

Solución Todas estas propiedades son inmediatas de la definición de determinante, damos a modo de ejemplo la demostración de la primera , las restantes quedan como ejercicio para el alumno.
**Demostración 1:** Por ejemplo si intercambiando las filas tenemos

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(-bc + ad) = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{4}$$

### 4.5.4 Producto vectorial

El **producto cruz o vectorial** se define para vectores en $\mathbb{R}^3$, y el resultado es un vector de $\mathbb{R}^3$. También tiene otras propiedades, entre ellas es que el vector resultante es ortogonal o perpendicular a los primeros.

**Definición 2** *El producto vectorial de* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ *y* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ *es*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\mathbf{k}. \tag{5}$$

La fórmula del producto vectorial es difícil de recordar, para ayudamos a recordarla, usamos determinantes de una matriz. Así usando determinantes de una matriz de $2 \times 2$, tenemos que la definición (5) del producto vectorial podemos reescribirla como:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{6}$$

y también podemos reescribir la segunda componente de este vector, usando que el intercambio de columnas cambia el signo del determinante

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \tag{7}$$

Si construimos una matriz de $2 \times 3$ donde las filas son los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ respectivamente

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos como **"regla nemotécnica"** la fórmula de calculo de un determinante de 3x3, tenemos que el producto vectorial de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

El determinante de la matriz de $3 \times 3$ que usamos no es matemáticamente correcto ya que en la primera fila escribimos vectores y en las otras números, por esto decimos que es una regla nemotécnica.

**Ejemplo 12** *Calcular* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ *para* $\overrightarrow{u} = (1, -2, -1)$ *y* $\overrightarrow{v} = (-2, 4, 1)$.

Tenemos que

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + +0\mathbf{k}$$

y

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Notemos que los resultados difieren en el signo, ya que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + +0\mathbf{k} = -\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}\right)$. Esta propiedad vale en general
**Observación** Tenemos que el producto vectorial de dos vectores **no es conmutativo**, en realidad vale que

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}\right)$$

Para demostrar esta igualdad usamos la definición de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ y las propiedades de determinante, como se muestra a continuación:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\boldsymbol{i} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}\right)$$

**Interpretación geométrica de** $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ Como el producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es un vector, podemos relacionar el módulo, dirección y sentido con los de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

**Teorema 1** *Sean* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *y* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\theta$ *el ángulo entre ellos. Entonces:*

1. *Módulo:* $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta$ .
2. *Dirección:* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *es perpendicular tanto a* $\overrightarrow{u}$ *como a* $\overrightarrow{v}$.
3. *Sentido:* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *forman un sistema de mano derecha.*

**Demostración**

1. Queremos probar que el módulo de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es $|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta$, para ello necesitamos la igualdad de Lagrange

$$|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \tag{8}$$

   Cuya demostración es un ejercicio algebraico sencillo (partiendo de $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ ) cuyos detalles quedan para el alumno.

   Usando esta la identidad (8) tenemos:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2 &= |\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \\ &= |\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2 - \left(|\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2 \cos^2\theta\right) && \text{Def. de prod. escalar} \\ &= |\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) && \text{sacando factor común} \\ &= |\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta && \text{de } \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{aligned}$$

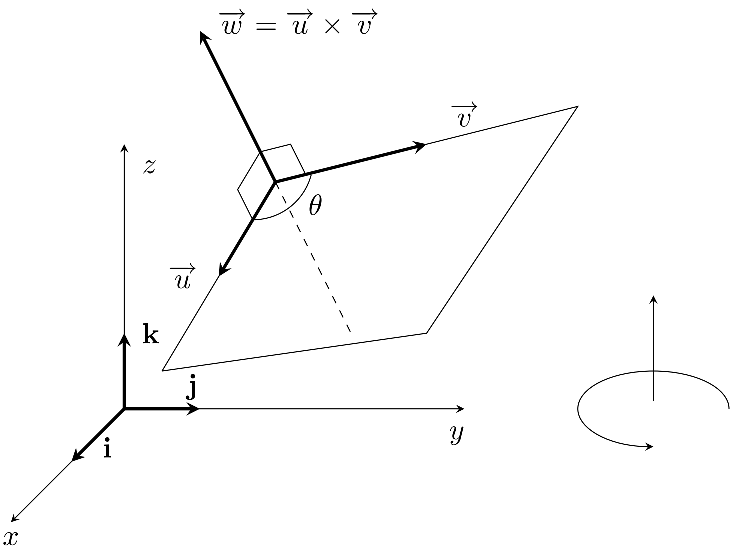
   por lo tanto el módulo de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es $|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta$.

2. Probaremos que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular $\overrightarrow{u}$, es decir que $\overrightarrow{u} . (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0$

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{u} . (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) & = & (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) & \text{def. de } \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \\ & = & u_1 (u_2v_3 - u_3v_2) + u_2 (u_3v_1 - u_1v_3) + u_3 (u_1v_2 - u_2v_1) & \text{Proposición} \\ & = & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{array}{c}\text{Prop.5 (determinantes} \\ \text{con dos filas iguales)}\end{array} \\ & = & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular $\overrightarrow{u}$. En forma similar probamos que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{v}$.

3. El significado de obtener un sistema de mano derecha, con las vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, se ilustran la figura:




**Proposición 3** *Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$.Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos (es decir, tienen la misma dirección o uno es un múltiplo del otro) si y sólo si $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$*

**Demostración.** Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos, es decir que uno es múltiplo del otro, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ Luego calculando $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ resulta el vector $\overrightarrow{0}$.

Supongamos que ahora que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ entonces $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = 0$, y por el teorema anterior tenemos

$$0 = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \quad = |\overrightarrow{u}| |\overrightarrow{v}| \operatorname{sen} \theta,$$

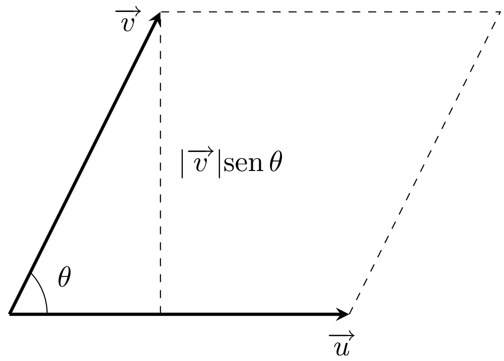
entonces $|\overrightarrow{u}| = 0$ o $|\overrightarrow{v}| = 0$ o $\operatorname{sen} \theta = 0$ , como los vectores son no nulos, resulta que $\operatorname{sen} \theta = 0$, es decir $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, por lo tanto los vector $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos.

**Ejemplo 13** *Sean* **i**, **j**, *y* **k** *los versores de $\mathbb{R}^3$ tenemos que*

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

**Ejemplo 14 (Área de paralelogramo)** *Calcular el área de un paralelogramo con u y v como lados adyacentes como muestra la figura.*

Solución. Recuerde que el área de un paralelogramo es el producto de la base por la altura. Observando la figura tenemos que $|\overrightarrow{u}|$ es la base y la altura es $|\overrightarrow{v}| \operatorname{sen} \theta$, por lo tanto el área del paralelogramo es $|\overrightarrow{u}| |\overrightarrow{v}| \operatorname{sen} \theta$, pero esto es igual a $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$, es decir que el *área del paralelogramo.*




En forma similar al ejemplo anterior el módulo del producto *triple o mixto* $(\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}))$ representa a un volumen, donde el producto triple de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.

**Ejemplo 15 (Volumen y producto triple)** *Mostrar que el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es*

$$V = |\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})|\,.$$